

Πεπερασμένο όριο της $f(x)$ στο x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$

Ιδιότητες ορίου :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

ΑΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa \cdot f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, αν $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^v$

Συνέπεια των παραπάνω ιδιοτήτων είναι ότι αν $P(x)$, $Q(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις, θα ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} P(x_0) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad , \text{ αν } Q(x_0) \neq 0$$

Θεώρημα 1ο :

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Το πρόσημο του ορίου δηλώνει το πρόσημο της f κοντά στο x_0 .

Θεώρημα 2ο :

Αν υπάρχει το όριο των συναρτήσεων f και g στο x_0 και επιπλέον είναι:

$f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

(Ακόμα και αν $f(x) < g(x)$ να ήταν κοντά στο x_0 , πάλι θα καταλήγαμε στο ίδιο συμπέρασμα, δηλαδή ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$)

Κριτήριο Παρεμβολής:

Έστω f, g, h συναρτήσεις, ώστε $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda$. Τότε θα είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$.

Συνέπεια του κριτηρίου παρεμβολής είναι ότι το όριο φραγμένης επί

μηδενικής κάνει μηδέν, πχ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$

Τριγωνομετρικά όρια:

Για κάθε x ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

Μη πεπερασμένο όριο της $f(x)$ στο x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

Ιδιότητες ορίου :

Ακριβώς όπως και όταν:

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

έτσι και τώρα:

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [-f(x)] = \mp\infty$$

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Για το αντίστροφο διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$$

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$$

Θεώρημα 1ο (όριο αθροίσματος):

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Το άθροισμα αντίθετων απείρων είναι απροσδιόριστη μορφή	

Θεώρημα 2ο (όριο γινομένου):

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$	$\alpha > 0$	$\alpha > 0$	$\alpha > 0$	$\alpha > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
Τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Το γινόμενο $0 \cdot \infty$ είναι απροσδιόριστη μορφή

Απροσδιόριστες μορφές:

- Το άθροισμα δύο αντίθετων απείρων ή η διαφορά δύο όμοιων απείρων: $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$
- Το γινόμενο $0(\pm\infty)$ και τα πηλίκα $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Για να υπολογίσουμε τα όρια αυτών των μορφών (αν υπάρχουν) πρέπει να βρούμε τρόπο ώστε να άρουμε την απροσδιοριστία.

Συνήθεις τρόποι άρσης της απροσδιοριστίας:

- παραγοντοποίηση και απλοποίηση
- συζυγής παράσταση (για να διώξουμε ρίζες)